I) PRODUIT SCALAIRE

NOTATIONS :

E $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour une application de E^2 vers $\mathbb{R}$; l'image de $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est notée $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$ ou $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$, ou parfois simplement $\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{y}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

L'application est alors notée $(. \mid .)$ et on note par

$(\overrightarrow{x} \mid .)$ l'application partielle de E dans $\mathbb{R}$ qui à $\overrightarrow{y}$ fait correspondre $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$

$(. \mid \overrightarrow{y})$ l'application partielle de E dans $\mathbb{R}$ qui à $\overrightarrow{x}$ fait correspondre $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$.

DEF : un produit scalaire sur un espace vectoriel réel est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* sur cet espace.

FORME : l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

BILINÉAIRE : les applications partielles $(\overrightarrow{x} \mid .)$ et $(. \mid \overrightarrow{y})$ sont toutes linéaires, i.e.

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \lambda$$

$(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y_1} + \lambda \overrightarrow{y_2}) =$ ....
$(\overrightarrow{x_1} + \lambda \overrightarrow{x_2} \mid \overrightarrow{y}) =$ ....

SYMÉTRIQUE : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \qquad (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x})$

DÉFINIE : $\forall \overrightarrow{x} \qquad (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

POSITIVE : $\forall \overrightarrow{x} \quad (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) \geqslant 0$

REMARQUE :" DÉFINIE POSITIVE" SE RÉDUIT À $\forall \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \quad (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) > 0.$

D1

Quelques calculs si $(. \mid .)$ est bilinéaire et symétrique :

$$\boxed{(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) + 2(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y})}$$

(en notation simplifiée : $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})^2 = \overrightarrow{x}^2 + 2\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y}^2$)

$$\boxed{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) - 2(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y})}$$

(en notation simplifiée : $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})^2 = \overrightarrow{x}^2 - 2\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y}^2$)

$$\boxed{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) - (\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y})}$$

(en notation simplifiée : $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^2 - \overrightarrow{y}^2$)

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i} \mid \sum_{j=1}^{p} \beta_j \overrightarrow{y_j}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}^{n} \alpha_i \beta_j (\overrightarrow{x_i} \mid \overrightarrow{y_j})}$$

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i} \mid \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x_i} \mid \overrightarrow{x_i}) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\overrightarrow{x_i} \mid \overrightarrow{x_j})}$$

(en notation simplifiée : $\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overrightarrow{x_i}\ \overrightarrow{x_j}$)

D2

DEF : un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien* ; si de plus il est de dimension finie, on parle d'*espace euclidien*.

EXEMPLES : E1

- produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$: $\left((x_i)_{i=1..n} \mid (y_i)_{i=1..n}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- produit scalaire usuel dans $M_{np}(\mathbb{R})$: $(A \mid B) = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} A(i,j)\, B(i,j) = \text{trace}({}^tA.B)$;
- produit scalaire usuel dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})\,, a<b$: $(f \mid g) = \int_a^b fg$

II) INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET NORME EUCLIDIENNE

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

TH : si $(.\mid.)$ est un produit scalaire sur E, $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$

$(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})^2 \leqslant (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x})(\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y})$
et $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})^2 = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x})(\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ liée

D3

APPLICATIONS:

E2

2) Norme euclidienne.

DEF : une *norme* sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$, $\overrightarrow{x} \mapsto \|\overrightarrow{x}\|$ vérifiant :

$\forall \overrightarrow{x} \in E \quad \|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
$\forall \overrightarrow{x} \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda \overrightarrow{x}\| = \lvert\lambda\rvert\, \|\overrightarrow{x}\|$
$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E \quad \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (inégalité triangulaire)

PROP et DEF : si $(.\mid.)$ est un produit scalaire, on pose $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x})}$; $\overrightarrow{x} \mapsto \|\overrightarrow{x}\|$ est alors une norme sur E, appelée *norme euclidienne* associée au produit scalaire $(.\mid.)$.

PROP : égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\| \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \text{ et } \overrightarrow{y} \text{ sont positivement liés } (\exists \lambda, \mu \geqslant 0\,, (\lambda,\mu) \neq (0,0) \ \ / \ \ \lambda\overrightarrow{x} = \mu\overrightarrow{y})$$

D4

REM : dorénavant le carré scalaire $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x})$ sera toujours noté $\|\overrightarrow{x}\|^2$.

Quelques propriétés avec ces nouvelles notations :

1. $\lvert(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})\rvert \leqslant \|\overrightarrow{x}\|\, \|\overrightarrow{y}\|$: inégalité de Cauchy-Schwarz
2. $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$
2 bis. $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x}\|^2 - \|\overrightarrow{y}\|^2\right)$: première identité de polarisation
2 ter : $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$: relation d'Al-Kashi
3 : $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = 2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2$: égalité du parallélogramme
4 : $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2\right)$: deuxième identité de polarisation

NOTA : de l'égalité du parallélogramme, on déduit la *formule de la médiane* dans un triangle (ABC) de médiane (AI) :

$$AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - IB^2$$

DEF : si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont non nuls, la mesure de l'*angle non orienté* $(\widehat{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}})$ est $\arccos \dfrac{(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})}{\|\overrightarrow{x}\|\, \|\overrightarrow{y}\|} \in [0,\pi]$, de sorte que

$$(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x}\|\, \|\overrightarrow{y}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{x}\,,\ \overrightarrow{y}})$$

EXEMPLE : E3

III) ORTHOGONALITÉ

Dans tout ce paragraphe, on se place dans un espace euclidien E (donc de dimension finie).

1) Orthogonalité de 2 vecteurs.

DEF : deux vecteurs sont dits orthogonaux (pour le produit scalaire considéré) si leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = 0.$$

THEORÈME DE PYTHAGORE : $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2$.

2) Orthogonal d'un vecteur, d'une partie.

DEF : l'*orthogonal* d'un vecteur est l'ensemble des vecteurs qui lui sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{x}^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in E \ / \ \overrightarrow{y} \perp \overrightarrow{x}\}$$

l'*orthogonal* d'une partie X de l'espace est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à *tous* les vecteurs de X :

$$X^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in E \ / \ \forall \overrightarrow{x} \in X \ \ \overrightarrow{y} \perp \overrightarrow{x}\} = \bigcap_{\overrightarrow{x} \in X} \overrightarrow{x}^{\perp}$$

REM : $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} = \overrightarrow{x}^{\perp}$, $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}^{\perp} = \overrightarrow{x}^{\perp} \cap \overrightarrow{y}^{\perp}$.

EXEMPLES : E4 $\left\{\overrightarrow{0}\right\}^{\perp}$ = ..., $E^{\perp}$ = ...

PROP : $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\{\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}\}^{\perp} = (\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}))^{\perp}$

D5

3) Parties (fortement) orthogonales entre elles.

DEF deux parties X et Y de E sont (fortement) orthogonales (entre elles) si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre :

$$X \perp Y \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in X \ \ \forall \overrightarrow{y} \in Y \quad \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$$

PROPRIÉTÉS : $\begin{cases} X \perp Y \Leftrightarrow X \subset Y^{\perp} \Leftrightarrow Y \subset X^{\perp} \\ X \subset X^{\perp\perp} \\ X \subset Y \Rightarrow X^{\perp} \supset Y^{\perp} \\ X \perp Y \Rightarrow X \cap Y \subset \{\overrightarrow{0}\} \end{cases}$

D6

PROP : pour qu'une partie X soit orthogonale à un sous-ev F, il suffit qu'elle soit orthogonale à une famille génératrice de F.

D7

CORO : si $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x}_p)$, $G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{y_1}, ..., \overrightarrow{y}_q)$,

$$F \perp G \Leftrightarrow \forall i, j \ \ \overrightarrow{x}_i \perp \overrightarrow{y}_j$$

PROP : soient $F_1, ..., F_p$ des sous espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux ; la somme des F_i est alors directe.

D8

REM : cette notion d'orthogonalité est dite *forte* car elle ne comprend pas par exemple la notion d'orthogonalité de deux plans en dimension 3 ; on peut définir la notion d'orthogonalité *faible* de deux sev F et G s'il existe 3 sev deux à deux (fortement) orthogonaux H, F', G' tels que $F = H \oplus F'$ et $G = H \oplus G'$.

4) Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales).

DEF : une famille de vecteurs est dite *orthogonale* si les vecteurs sont *non nuls* et orthogonaux deux à deux, *orthonormée* (ou *othonormale*) si de plus les vecteurs sont de norme égale à 1 (on dit alors qu'ils sont "normés", ou "unitaires").

$(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p})$ est orthogonale $\Leftrightarrow \forall i \ \ \overrightarrow{x_i} \neq \overrightarrow{0}$ et $\forall i \neq j \ \ \overrightarrow{x_i} \perp \overrightarrow{x_j}$
$(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p})$ est orthonormée $\Leftrightarrow \ \forall i \ \ \|\overrightarrow{x_i}\| = 1$ et $\forall i \neq j \ \ \overrightarrow{x_i} \perp \overrightarrow{x_j} \Leftrightarrow (\overrightarrow{x_i} \mid \overrightarrow{x_j}) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

Exemple : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel.
PROP : une famille orthogonale est toujours libre (elle ne peut donc avoir plus de n éléments en dimension n).
D9

PROP : si $(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p})$ est orthogonale, $\left(\pm\frac{\overrightarrow{x_1}}{\|\overrightarrow{x_1}\|}, ..., \pm\frac{\overrightarrow{x_p}}{\|\overrightarrow{x_p}\|}\right)$ est orthonormée.

PROP : si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E, les coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathcal{B}$ sont données par

$$x_i = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e_i})$$

D10

PROP : si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E, le produit scalaire $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$ se calcule par la formule

$$(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX\,Y$$

où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{bmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans $\mathcal{B}$.
D11

5) Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

TH1 (faible) : si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base de E euclidien , il existe une base $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n}\right)$ orthogonale telle que

$$\forall k \in [|1, n|] \;\; \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_k}) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_k}\right)$$

D12

REMARQUE 1 : on a donc posé : $\begin{cases} \overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_2 + \lambda_{21}\overrightarrow{f}_1 \\ ... \\ \overrightarrow{f}_k = \overrightarrow{e}_k + \lambda_{k1}\overrightarrow{f}_1 + ... + \lambda_{k,k-1}\overrightarrow{f}_{k-1} \\ ... \\ \overrightarrow{f}_n = \overrightarrow{e}_n + \lambda_{n1}\overrightarrow{f}_1 + ... + \lambda_{n,n-1}\overrightarrow{f}_{n-1} \end{cases}$ avec $\lambda_{k,i} = -\dfrac{\left(\overrightarrow{e}_k \mid \overrightarrow{f}_i\right)}{\left\|\overrightarrow{f}_i\right\|^2}$.

DEF : La base $\left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n}\right)$ est appelée *la base orthogonale de Schmidt* associée à $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$.

REMARQUE 2 : la condition $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_k}) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_k}\right)$ équivaut à ce que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ soit triangulaire supérieure.

REMARQUE 3 : si l'on pose $\begin{cases} \overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_2 + \mu_{21}\overrightarrow{e}_1 \\ ... \\ \overrightarrow{f}_k = \overrightarrow{e}_k + \mu_{k1}\overrightarrow{e}_1 + ... + \mu_{k,k-1}\overrightarrow{e}_{k-1} \\ ... \\ \overrightarrow{f}_n = \overrightarrow{e}_n + \mu_{n1}\overrightarrow{e}_1 + ... + \mu_{n,n-1}\overrightarrow{e}_{n-1} \end{cases}$ les $\mu_{k,i}$ seront obtenus par un système triangulaire que l'on devra résoudre. Mais c'est parfois plus pratique que la méthode précédente.

REMARQUE 4 : $\mathcal{D} = (\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_n})$ où $\overrightarrow{g_i} = \dfrac{\overrightarrow{f}_i}{\left\|\overrightarrow{f}_i\right\|}$ est alors orthonormée et vérifie aussi

$$\forall k \in [|1, n|] \;\; \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_k}) = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_k})$$

TH 2 (fort, admis) : si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base de E euclidien, il existe une *unique* base $\mathcal{D} = (\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_n})$ ortho*normée* telle que

$$\forall k \in [|1, n|] \ \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_k}) = \text{Vect}(\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_k}) \text{ et } (\overrightarrow{g}_k \mid \overrightarrow{e}_k) > 0$$

DEF : La base $(\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_n})$ est appelée *la base orthonormée de Schmidt* associée à $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$.
REMARQUE 5 : la base $\mathcal{D}$ du théorème 2 est celle de la remarque 4 .

REMARQUE 6 : la condition Vect$(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_k})$ =Vect$(\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_k})$ et $(\overrightarrow{g}_k \mid \overrightarrow{e}_k) > 0$ équivaut à ce que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ soit triangulaire avec des coefficients diagonaux > 0.
REMARQUE 7 : $\overrightarrow{f_k} = \overrightarrow{e_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (\overrightarrow{e_k} \mid \overrightarrow{g_i}) \overrightarrow{g_i} = p_k(\overrightarrow{e_k})$ où p_k est la projection orthogonale sur $(Vect(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e}_{k-1}))^{\perp}$.
EXEMPLE : E5

CORO 1 : tout espace euclidien possède une base orthonormée.

CORO 2 : théorème de la base orthonormée incomplète : toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

D13
CORO 3 : si F est un sous-espace vectoriel de E euclidien

$$E = F \oplus F^{\perp} \text{ (autrement dit, l'orthogonal d'un sev en est un supplémentaire) et } F^{\perp\perp} = F$$

De plus, si $E = F \oplus G$

$$F \perp G \Leftrightarrow G = F^{\perp} \Leftrightarrow F = G^{\perp}$$

D14

Exemples : l'orthogonal d'une droite est un hyperplan, et réciproquement.

REM : une conséquence du corollaire 1 est que si $(. \mid .)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension n, $(. \mid .)$ est un produit scalaire ss'il existe une base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ telle que $(\overrightarrow{e_i} \mid \overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij}$.
6) Projections et symétries orthogonales.

On se place dans un espace E euclidien.

DEF : une $\left\{ \begin{array}{c} \text{projection} \\ \text{symétrie} \end{array} \right.$ de E est dite *orthogonale* lorsque sa base et sa direction sont orthogonales.
Une symétrie orthogonale dont la base est un hyperplan est appelée une *réflexion*.
REMARQUE : pour définir une projection ou une symétrie orthogonale, il suffit de donner sa base (ou sa direction).

Si donc p est un projecteur de E ;

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \ker p \perp \operatorname{Im} p$$

Si s est une symétrie de E ;

$$s \text{ est une symétrie orthogonale } \Leftrightarrow \ker(s - id_E) \perp \ker(s + id_E)$$

CALCUL DU PROJETÉ si l'on connaît une base orthogonale de l'image de la projection :
si $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_q})$ est une base orthogonale de $F = \operatorname{Im} p$

$$p(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{q} \frac{(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e_i})}{\|\overrightarrow{e_i}\|^2} \overrightarrow{e_i}$$

D15

REMARQUE : ceci permet alors de calculer $q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$ et $s(\overrightarrow{x}) = 2p(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}$.

APPLICATION : si p est la projection orthogonale de direction Vect$(\overrightarrow{n})$

$$p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \frac{(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{n})}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n}$$

D16

EXEMPLE : E6

PROP : étant donnés deux vecteurs distincts et de même norme $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ de E, il existe une unique réflexion échangeant ces deux vecteurs ; c'est la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)^{\perp}$.
D17 avec le lemme : $\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\| \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \perp \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)$

IV) AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX, MATRICES ORTHOGONALES

1) Automorphismes orthogonaux.

DEF : E espace vectoriel euclidien ; un endomorphisme de E est dit *orthogonal* s'il conserve la norme :

$$f \in E^E \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{un endomorphisme orthogonal} \\ \text{(ou une isométrie vectorielle)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1.\ f \text{ est linéaire} \\ 2.\ \forall \overrightarrow{x} \in E \quad \|f(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\| \end{array} \right.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.
EXEMPLES : id_E et les symétries orthogonales ; on a en effet :

PROP : une symétrie de E est orthogonale ssi c'est un endomorphisme orthogonal :

$$\text{si } s \text{ est une symétrie de base } F = \ker(s - id_E) = \operatorname{Im}(s + id_E) \text{ et de direction } G = \ker(s + id_E) = \operatorname{Im}(s - id_E)$$
$$\boxed{F \perp G \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E \ \ \|s(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|}$$

D18

ATTENTION : les projections orthogonales (excepté l'identité) ne sont pas des endomorphismes orthogonaux !!!!
PROP : un endomorphisme orthogonal est injectif, donc bijectif, car on est en dimension finie ; on parle donc toujours d'*automorphisme* orthogonal.
D19

PROP : une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal, ainsi que la réciproque d'un automorphisme orthogonal : $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.
D20

PROP : un automorphisme orthogonal conserve le produit scalaire :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E \ \ (f(\overrightarrow{x}) \mid f(\overrightarrow{y})) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})}$$

CORO : un automorphisme orthogonal conserve les angles non orientés et conserve l'orthogonalité.
D21

ATTENTION : les homothéties de rapport $\neq \pm 1$ conservent aussi l'orthogonalité, sans être des automorphismes orthogonaux !

REM : on peut montrer que réciproquement une application conservant le produit scalaire est forcément linéaire, et est donc un automorphisme orthogonal (exercice).

ATTENTION : par contre, la condition $\forall \overrightarrow{x} \in E \quad \|f(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ ne suffit pas pour faire de f un automorphisme orthogonal.

Contre-exemple : $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\| \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire fixé.

CARACTÉRISATION À PARTIR DES BASES ORTHONORMÉES
Soit $f \in L(E)$; on a les caractérisations :

1.f est un automorphisme orthogonal
$\Leftrightarrow$ 2. l'image de toute base orthonormée est une base orthonormée
$\Leftrightarrow$ 3. l'image d'une base orthonormée fixée est une base orthonormée

D22

2) Matrices orthogonales.

TH : $f \in L(E)$, $\mathcal{B}$ base orthonormée, $A = mat_{\mathcal{B}}(f)$; alors

$$f \text{ est un automorphisme orthogonal } \Leftrightarrow A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA$$

D23

DEF : une matrice carrée réelle est dite *orthogonale* si c'est la matrice d'un automorphisme orthogonal dans une base orthonormée ; l'ensemble des matrice carrées réelles orthogonales d'ordre n est noté $O_n(\mathbb{R})$.

On a alors les diverses CNS pour qu'une matrice $A = [C_1, ..., C_n] = \begin{bmatrix} L_1 \\ ... \\ L_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ soit une matrice orthogonale :

1. A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$	
2. ${}^tAA = I_n$	2bis. $A^tA = I_n$
3. ${}^tC_iC_j \; (= (C_i \mid C_j)) = \delta_{ij}$	3bis. $L_i{}^tL_j \; (= (L_i \mid L_j)) = \delta_{ij}$
4. Les colonnes de A sont orthonormées	4bis. Les lignes de A sont orthonormées
5. A est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.	. .

D24

ATTENTION : pour qu'une matrice soit orthoGONALE, il faut que ses lignes (ou colonnes) soient orthoNORMÉES.

PROP : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $O(E)$ (avec $\dim E = n$).
D25

PROP : une matrice orthogonale est de déterminant ± 1 (il en est donc de même pour les automorphismes orthogonaux).
D26

ATTENTION : une matrice de déterminant ± 1 n'est pas forcément orthogonale !
E7

3) Automorphismes orthogonaux, et matrices orthogonales, directs et indirects.
Pour un automorphisme orthogonal, ou une matrice orthogonale :
DIRECT (ou positif) : de déterminant 1
INDIRECT (ou négatif) : de déterminant -1.

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \text{direct} \circ \text{direct} &= \text{direct} \\ \text{direct} \circ \text{indirect} &= \text{indirect} \\ \text{indirect} \circ \text{direct} &= \text{indirect} \\ \text{indirect} \circ \text{indirect} &= \text{direct} \end{aligned}$$

L'inverse d'un automorphisme direct (resp. indirect) est direct (resp. indirect).

De même pour les matrices, en remplaçant $\circ$ par $\times$.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux directs est noté $O^+(E)$ ou $SO(E)$	L'ensemble des matrices orthogonales directes est noté $O_n^+(\mathbb{R})$ ou $SO_n(\mathbb{R})$
C'est un sous-groupe de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E	C'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.
L'ensemble des automorphismes orthogonaux *in*directs est noté $O^-(E)$ Ce n'est pas un groupe !!!	L'ensemble des matrices orthogonales *in*directes est noté $O_n^-(\mathbb{R})$ Ce n'est pas un groupe !!!

EXEMPLES :

PROP : id_E est directe ; $-id_E$ est directe en dimension paire, indirecte en dimension impaire ; une symétrie est directe ssi sa direction est de dimension paire ; une réflexion est indirecte.

D27

PROP : un endomorphisme est un automorphisme orthogonal direct ss'il transforme une base orthonormée en une base orthonormée de même orientation (et c'est alors ainsi pour toute base).

Un matrice carrée est orthogonale directe ssi c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée de même orientation.

4) Automorphismes orthogonaux du plan.

P plan vectoriel euclidien.

On verra qu'il n'y a que les rotations vectorielles et les réflexions vectorielles.

TH :

Les matrices d'ordre deux orthogonales positives sont les matrices de la formes $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Les matrices d'ordre deux orthogonales négatives sont les matrices de la formes $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

D28

Si l'on pose donc $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$,

$$O_2^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta \ / \ \theta \in [0, 2\pi[\}, O_2^-(\mathbb{R}) = \{S_\theta \ / \ \theta \in [0, 2\pi[\}$$

PROP : $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$; $S_\theta \times S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$.

D29

CORO 1 : les groupes $O_2^+(\mathbb{R})$ et $O^+(P)$ sont commutatifs.

CORO 2 : si un automorphisme orthogonal direct du plan a une matrice A dans une base orthonormée, il a la même matrice A dans toutes les bases orthonormées de même orientation.

D30

DEF : le plan P est supposé orienté ; par définition, la rotation (vectorielle) d'angle θ, notée r_θ, est l'automorphisme orthogonal de matrice R_θ dans une base orthonormée directe.

REM : si l'on change l'orientation de l'espace, l'angle de la rotation est changé en son opposé.

PROP : $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta$; $(r_\theta)^{-1} = r_{-\theta}$; et les automorphismes orthogonaux directs du plans sont exactement les rotations vectorielles.

D31

PROP : soit s_φ l'automorphisme orthogonal de matrice $S_{2\varphi}$ dans la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; s_φ est la réflexion par rapport à la droite d'équation $\cos\varphi \, y = \sin\varphi \, x$.

D32

CORO : les automorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions vectorielles.

PROP : $s_{\varphi_2} \circ s_{\varphi_1} = r_{2(\varphi_2-\varphi_1)}$

D33

CORO : toute rotation vectorielle se décompose en produit de deux réflexions vectorielles, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

D 34

REMARQUE : si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe z, $r_\theta(\overrightarrow{u})$ a pour affixe $e^{i\theta}z$ et $s_\varphi(\overrightarrow{u})$ a pour affixe $e^{2i\varphi}\overline{z}$.

5) Angle orienté de vecteurs, de droites.

P plan vectoriel euclidien orienté.

Lemme 1 : si $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, il existe une unique rotation du plan transformant $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{v}$.

D35

DEF : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nul, tout réel θ tel que r_θ transforme $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ en $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$.

On écrit par abus : $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \theta \ \ [2\pi]$.

REM : si on change l'orientation du plan, l'angle est changé en son opposé.

PROP 1 : on a la relation de Chasles : $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}}) \quad [2\pi]$.

PROP2 : si $f \in O(P) \quad (\widehat{f(\overrightarrow{u}),f(\overrightarrow{v})}) = \det f.(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) \ \ [2\pi]$.

Lemme 2 : étant donné deux droites vectorielles D_1 et D_2, il existe exactement deux rotations r_θ et $r_{\theta+\pi}$ du plan transformant D_1 en D_2.

D36

DEF : tout réel θ tel que r_θ transforme D_1 en D_2 est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{D_1,D_2})$.

On écrit par abus : $(\widehat{D_1,D_2}) = \theta \ \ [\pi]$.

PROP : on a la relation de Chasles : $(\widehat{D_1,D_2}) + (\widehat{D_2,D_3}) = (\widehat{D_1,D_3}) \quad [\pi]$.

Et avec ces notations :

$$\boxed{s_{D_2} \circ s_{D_1} = r_{2(\widehat{D_1,D_2})}}$$